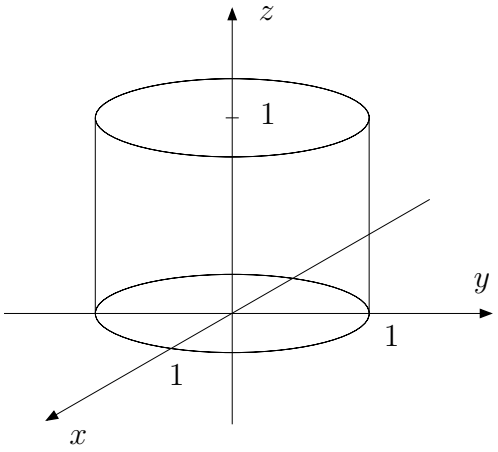
Musterlösung zur Prüfung Mathematik III, Frühling 07,
Dr. P. Thurnheer

1. a) Bei der Fläche E handelt es sich um einen Zylindermantel mit Radius 1 und Höhe 1.



b) i) Der Normalenvektor ist gegeben durch

$$a_u \times a_v = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \iint_E F(a(u,v)) \cdot (a_u \times a_v)\, du\, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{v}\cos u \\ \sqrt{v}\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} du\, dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{v}\, du\, dv \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{v}\, dv = 2\pi \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right) \Big|_{v=0}^{v=1} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

ii) Da die z-Komponente des Vektorfeldes F verschwindet und der Normalenvektor von K_1 in die negative z-Richtung zeigt, verschwindet der Fluss von F durch K_1:

$$\Phi_{K_1} = \iint_{K_1} \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} du\, dv = \iint_{K_1} 0\, du\, dv = 0.$$

iii) Analog zu **ii)** gilt

$$\Phi_{K_2} = 0.$$

Bitte wenden!

c) Sei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Vollzylinder mit Mantel E und Grund- bzw. Deckfläche K_1 bzw. K_2 und $n\,du\,dv$ das nach aussen gerichtete vektorielle Volumenelement auf ∂Z. Der Satz von Gauss besagt:

$$\iint_{\partial Z} F \cdot n\,du\,dv = \iiint_Z \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz.$$

Der Rand ∂Z setzt sich aus E, K_1 und K_2 zusammen, und die linke Seite ist gegeben durch

$$\iint_{\partial Z} F \cdot n\,du\,dv = \Phi_E + \Phi_{K_1} + \Phi_{K_2} = \frac{4\pi}{3}.$$

Zur Berechnung der rechten Seite führen wir Zylinderkoordinaten ein:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$

womit die Jacobideterminante durch r gegeben ist. Ausserdem ist

$$\operatorname{div} F = 2\sqrt{z}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iiint_Z \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r\sqrt{z}\,d\varphi\,dr\,dz \\
&= 4\pi \int_0^1 \int_0^1 r\sqrt{z}\,dr\,dz = 4\pi \int_0^1 \left(\frac{r^2}{2}\sqrt{z}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \sqrt{z}\,dz = 2\pi \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1} = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

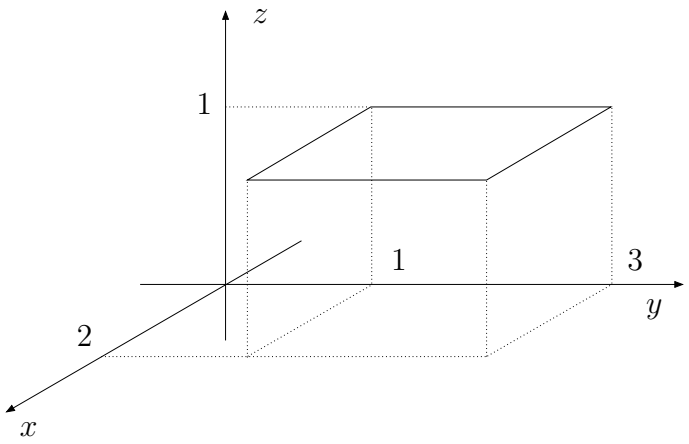
Siehe nächstes Blatt!

2. a) i)

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^x + y^2 \\ 2xy + 1 \\ xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Nein, denn gäbe es eine Funktion f mit $\operatorname{grad} f = F$, so wäre $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$.

b) E beschreibt ein zur (x, y)-Ebene paralleles Quadrat mit Seitenlänge 2 auf Höhe $z = 1$.



Mit dem Satz von Stokes gilt

$$A = \int_{\partial E} F = \iint_E \operatorname{rot} F \cdot n \, du \, dv = \int_0^2 \int_1^3 \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dv \, du = 0.$$

c) Dies ist kein Widerspruch. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet existiert zwar ein Potential, wenn die Arbeit längs jedes geschlossenen Weges in diesem Gebiet verschwindet. Hier verschwindet die Arbeit aber nur längs eines bestimmten geschlossenen Weges.

Bitte wenden!

3. Die Gleichung lässt sich mittels einem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ lösen. Einsetzen ergibt

$$X''T - \frac{t^2+1}{2t}XT' = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{X''}{X} = \frac{t^2+1}{2t}\frac{T'}{T}.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstante λ:

$$\frac{X''}{X} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad X'' = \lambda X \qquad (1)$$

$$\frac{t^2+1}{2t}\frac{T'}{T} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad T' = \frac{2\lambda t T}{t^2+1} \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) ist linear mit konstanten Koeffizienten. Sie besitzt das charakteristische Polynom $p(l) = l^2 - \lambda$. Wir unterscheiden die drei Fälle

- $\lambda = -k^2 < 0$:
  $p(l)$ hat die Nullstellen $l = \pm ik$, d. h. die Lösung der Gleichung lautet
  $$X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

- $\lambda = k^2 > 0$:
  $p(l)$ hat die Nullstellen $l = \pm k$, d. h. die Lösung der Gleichung lautet
  $$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

- $\lambda = 0$:
  $p(l)$ hat die doppelte Nullstelle $l = 0$, d. h. die Lösung der Gleichung lautet
  $$X(x) = Ax + B.$$

Die Gleichung (2) ist separierbar:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2\lambda t T}{t^2+1} \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dT}{T} = \lambda \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt \;\Leftrightarrow\; \ln|T| = \lambda \ln|t^2+1| + \tilde{C},$$

womit wir die Lösung

$$T(t) = C(t^2+1)^\lambda$$

erhalten.